

חזקות

חזקות עם מעריך טבעי



בפרק זה נחזור על המושג חזקות שנלמד בעבר, וכאן יילמד בהרחבה.

נתבונן בדוגמה: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

כאשר נכפול את המספרים הללו, נקבל את התוצאה 64. נתבונן על המכפלה מזווית אחרת. כפי שרואים, לפנינו מכפלה של שישה גורמים זההים זה לזה: כל אחד מהם שווה ל-2. מקובל לרשום את המכפלה בדרך מקוצרת באופן הבא: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$.

- לרשום 2^6 קוראים 2 בחזקת 6.
- המספר 2 נקרא בסיס החזקה.
- המספר 6 נקרא מעריך החזקה.

חשוב לציין: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$ אינו החישוב של המכפלה, אלא כתיבה מקוצרת של פעולת הכפל.

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 \quad \text{בדומה לזה:}$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4$$

$$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$$

$$3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 = 3^4 \cdot 5^2$$

שימו לב! בדוגמה האחרונה מופיעים שני גורמים שונים, 3 ו-5, והכתיבה המקוצרת מתבצעת לגבי הגורמים זההים בלבד.

$$7 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 = 7^4 \cdot 4^2 \cdot 3^3$$

$$x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot x \cdot y \cdot x = x^3 \cdot y^4$$

הגדרה

המספר a בחזקת x יירשם בצורת a^x ומשמעותו: $a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_x$ פעמים x

a נקרא בסיס החזקה.

x נקרא מעריך החזקה.

המספר x הוא מספר טבעי (מספר שלם וחיובי),

והוא מראה כמה פעמים מופיע הגורם a במכפלה.

מכאן מתקיים: $a^1 = a$.

דוגמאות

- א. $2^3=2 \cdot 2 \cdot 2=8$
ב. $5^4=5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5=625$
ג. $\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}=\frac{16}{81}$



ניתן לבצע את פעולת ההעלאה בחזקה על-ידי שימוש במחשבון.

השימוש במחשבון

ניתן להיעזר במקשים x^y או \wedge שמופיעים במחשבון באופן הבא:

3^4 : $3 \rightarrow x^y \rightarrow 4 \rightarrow = \rightarrow 81$ (מחשבון חדש)

או

3^4 : $3 \rightarrow \wedge \rightarrow 4 \rightarrow = \rightarrow 81$

3^4 : $3 \rightarrow \text{shift} \rightarrow x^y \rightarrow 4 \rightarrow = \rightarrow 81$ (מחשבון ישן)

חזקות שימושיות (רצוי לזכרון בעל-פה)

$2^2=4$	$3^2=9$	$4^2=16$	$5^2=25$
$2^3=8$	$3^3=27$	$4^3=64$	$5^3=125$
$2^4=16$	$3^4=81$		$5^4=625$
$2^5=32$	$3^5=243$		
$2^6=64$			
$2^7=128$			



נעסוק כעת בחזקות שבהן בסיס החזקה שלילי.

דוגמאות

ד. $(-2)^4=(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)=16$

ה. $(-2)^3=(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)=-8$

בדוגמה ד' התוצאה שהתקבלה חיובית ושווה ל-16, כי הגורם (-2) הוכפל בעצמו מספר זוגי של פעמים (המעריך הוא 4). לעומת זאת בדוגמה ה' התוצאה שהתקבלה שלילית ושווה ל-8, כי הגורם (-2) הוכפל בעצמו מספר אי-זוגי של פעמים (המעריך הוא 3).

תזכורת:

כאשר בסיס החזקה a^x הוא שלילי ($a < 0$, שלילי),
סימן התוצאה תלוי במעריך:
כאשר המעריך x זוגי, התוצאה היא חיובית.
כאשר המעריך x אי-זוגי, התוצאה היא שלילית.

דוגמאות

- ו. סימן התוצאה של $(-5)^{10}$ הוא חיובי, מכיוון שהמעריך הוא זוגי (שווה ל-10).
ז. סימן התוצאה של $(-17)^{13}$ הוא שלילי, מכיוון שהמעריך הוא אי-זוגי (שווה ל-13).
כלל זה מסייע בחישוב תרגילי חזקות מכיוון שכאשר למשל אנו נדרשים לחשב את החזקה $(-3)^5$, מספיק שנחשב את 3^5 , שהרי ידוע לנו שסימן התוצאה הוא שלילי.

דוגמאות

ח. $(-3)^5 = -3^5 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -243$

ט. $(-2)^6 = 2^6 = 64$

י. $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\left(\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$

הערה:

בדוגמה ח' ציינו כי $(-3)^5 = -3^5$, אך אין זה מצביע על הכלל. כלומר: $(-3)^5$,

פירושו שאת המספר (-3) מעלים בחזקת 5, ולכן:

$$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$$

לעומת זאת -3^5 , פירושו שלסימן "-" יש להתייחס בתור יחידה נפרדת (כאל -1),

ורק את המספר 3 מעלים בחזקת 5, ולכן: $-3^5 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$.

שני הביטויים שווים, מכיוון שהמעריך הוא אי-זוגי; אך אין זה מעיד על הכלל,

מכיוון שכאשר המעריך יהיה זוגי, לא יהיו הביטויים שווים, למשל:

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81 \neq -3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$$

$$(-3)^4 \neq -3^4$$

מכאן שחשוב לשים לב אם מעריך החזקה מתייחס לסימן שמופיע לפני המספר,

או לא.

דוגמאות

- י.א. $(-2)^4 = \begin{cases} (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16 \\ 2^4 = 16 \end{cases} \rightarrow$ המעריך זוגי, ולכן התוצאה חיובית.
- י.ב. $-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16 \rightarrow$ המעריך אינו משפיע על הסימן "-".
- י.ג. $-(-2)^4 = -2^4 = -16 \rightarrow$ המעריך זוגי והוא משפיע רק על הסימן "-".
שבתוך הסוגריים והרפך את $(-2)^4$ ל- 2^4 : אבל הסימן "-" שמחוץ לסוגריים משנה את סימן התוצאה.
- י.ד. $-(-2^4) = -(-16) = 16 \rightarrow$ המעריך 4 אינו משפיע על סימני ה"-" שבתגליל. המעריך מתייחס רק למספר 2, ולכן $2^4 = 16$. מתקבל הביטוי (-16) השווה ל-16.

סיכום

• המספר a בחזקת x יירשם בצורת a^x , ומשמעותו: $a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_x$ פעמים x

✓ a נקרא "בסיס החזקה", והוא מספר כלשהו.

✓ x נקרא "מעריך החזקה", והוא מספר טבעי (חיובי ושלם).

דוגמאות

$$(-10)^4 = (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) \cdot (-10), \quad 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6$$

• כאשר בסיס החזקה a^x הוא מספר חיובי, $a > 0$, הסימן של תוצאת פעולת החזקה הוא חיובי.

דוגמאות

$$3^4 = 81, \quad 2^3 = 8$$

סיכום - המשך

- כאשר בסיס החזקה a^x הוא מספר שלילי, $a < 0$, הסימן של תוצאת פעולת החזקה תלוי במעריך:

- ✓ כאשר המעריך x הוא מספר זוגי, התוצאה היא חיובית.
- ✓ כאשר המעריך x הוא מספר אי-זוגי, התוצאה היא שלילית.

$$\boxed{\text{זוגי } (-) = +, \text{ אי-זוגי } (-) = -}$$

דוגמאות

- התוצאה חיובית $= (-12)^6$, כי המעריך הוא 6, כלומר מספר זוגי.
- התוצאה שלילית $= (-12)^7$, כי המעריך הוא 7, כלומר מספר אי-זוגי.
- כאשר מעריך החזקה a^x הוא 1, כלומר $x=1$, תוצאת פעולת החזקה היא a (כל מספר בחזקת 1 שווה למספר עצמו):

$$a^1 = a$$

דוגמאות

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^1 = -\frac{2}{3}, (-7)^1 = -7, 5^1 = 5$$

- כאשר בסיס החזקה a^x הוא אפס, $a=0$, תוצאת החזקה היא אפס:

$$0^x = 0$$

דוגמאות

$$0^{12} = 0, 0^7 = 0, 0^5 = 0$$

תרגילים

1. רשמו בכתיב חזקות.

- | | |
|--|---|
| א. $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ | יא. $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$ |
| ב. $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ | יב. $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$ |
| ג. $5 \cdot 5 \cdot 5$ | יג. $\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$ |
| ד. $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ | יד. $(-3.2) \cdot (-3.2) \cdot (-3.2) \cdot (-3.2)$ |
| ה. $\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7}$ | טו. $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ |
| ו. $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ | טז. $a \cdot a \cdot a \cdot a$ |
| ז. $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$ | יז. $b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$ |
| ח. $1.5 \cdot 1.5 \cdot 1.5 \cdot 1.5$ | יח. $2 \cdot x \cdot y \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot y$ |
| ט. $0.4 \cdot 0.4$ | יט. $3 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot 2 \cdot b \cdot a$ |
| י. $0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3$ | כ. $-2 \cdot x \cdot y \cdot 5 \cdot x \cdot y$ |

תשובות: בעמ' 57

2. חשבו את החזקות הבאות.

- | | |
|-----------|---------------------------------|
| א. 2^5 | ו. $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ |
| ב. 3^3 | ז. $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ |
| ג. 5^4 | ח. $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ |
| ד. 6^3 | ט. 0.1^4 |
| ה. 10^4 | י. 1.5^3 |

תשובות: בעמ' 57

3. קבעו את סימן התוצאה של החזקות הבאות.

א. $(-3)^{15}$	ז. $-(-5)^{10}$	יג. -5^8	יט. $-(-2^6)$
ב. $(-12)^{40}$	ח. $-(-7)^{19}$	יד. -7^{11}	כ. $-(-3^{10})$
ג. $(-7)^{20}$	ט. $-(-4)^{16}$	טו. -9^{10}	כא. $-(-5^9)$
ד. $(-15)^{43}$	י. $-(-7)^{23}$	טז. -4^{12}	כב. $-(-10^2)$
ה. $(-9)^{56}$	יא. $-(-12)^{37}$	יז. -8^{15}	כג. $-(-12^3)$
ו. $(-10)^{13}$	יב. $-(-10)^8$	יח. -12^9	כד. $-(-20^6)$

תשובות: בעמ' 57

4. חשבו את החזקות הבאות.

א. $(-2)^4$	ו. $-(-3)^5$	יא. -2^8
ב. $(-3)^5$	ז. $-(-9)^2$	יב. $-\left(\frac{2}{5}\right)^2$
ג. $(-5)^3$	ח. $-\left(-\frac{6}{7}\right)^3$	יג. $-(-2^7)$
ד. $\left(-\frac{3}{4}\right)^4$	ט. -8^3	יד. $-(-4^3)$
ה. $-(-2)^6$	י. -1^4	טו. $-(-5^4)$

תשובות: בעמ' 57

5. העתיקו למחברתכם והוסיפו מספר בתוך העיגול כך שיתקיים שוויון.

א. $2^{\circ} = 16$	ה. $3^{\circ} = 81$	ט. $(-2)^{\circ} = -128$	יג. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ} = \frac{1}{4}$
ב. $3^{\circ} = 27$	ו. $6^{\circ} = 36$	י. $(-7)^{\circ} = 49$	יד. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\circ} = \frac{8}{27}$
ג. $9^{\circ} = 81$	ז. $10^{\circ} = 100$	יא. $(-2)^{\circ} = -8$	טו. $\left(-\frac{4}{5}\right)^{\circ} = \frac{16}{25}$
ד. $5^{\circ} = 125$	ח. $4^{\circ} = 64$	יב. $(-8)^{\circ} = 64$	טז. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{\circ} = \frac{1}{81}$

תשובות: בעמ' 57

6. העתיקו למחברתכם והוסיפו מספר בתוך העיגול כך שיתקיים שוויון.

- א. $\bigcirc^3 = 8$ ה. $\bigcirc^4 = 16$ ט. $\bigcirc^3 = -8$
- ב. $\bigcirc^2 = 25$ ו. $\bigcirc^2 = \frac{1}{4}$ י. $\bigcirc^5 = -32$
- ג. $\bigcirc^4 = 81$ ז. $\bigcirc^3 = \frac{1}{125}$ יא. $\bigcirc^3 = -27$
- ד. $\bigcirc^5 = 32$ ח. $\bigcirc^2 = \frac{4}{9}$ יב. $\bigcirc^7 = -1$

תשובות: בעמ' 57

7. נתונה הפונקציה $f(x)=2^x$.

א. השלימו את טבלת הערכים הבאה:

x	4		1	
f(x)		4		8

- ב. הציגו את הפונקציה בצורה גרפית עבור ערכי ה-x שבטבלה.
- ג. האם הפונקציה עולה או יורדת? הסבירו את תשובתכם.
- ד. מהי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)=2^x$ עם גרף הפונקציה $g(x)=64$?
- ה. בסדרת מספרים שבה האיבר הראשון הוא 2, כל איבר החל באיבר השני, גדול פי-2 מהאיבר שלפניו. רשמו בצורת חזקות את האיבר שבמקום ה-9.
- מהו האיבר? חשבו את ערכו.
- ו. בתרביית חיידקים מתחלק כל חיידק לשתיים כל חצי שעה.
- כמה חיידקים ייווצרו מחיידק אחד כעבור 6 שעות?
- ז. נפח קובייה שאורך צלעה a ס"מ הוא 8 סמ"ק. כתבו משוואה מתאימה וחשבו את אורך צלע הקובייה. האם פתרון זה מוצג בגרף שבסעיף ב'?

תשובות: בעמ' 57