גיאומטריה - מקבילות של ישרים וקטעים

(נושא זה הוא הרחבה של הפרק "מקבילות של ישרים וקטעים" המופיע בספר "מתמטיקה לכיתה ז' - חלק א' " עמ' 156-160)

<u>משימה מס' 13</u>

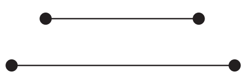
סמנו במחברתכם שתי נקודות שונות A ו-B.

דרך כל אחת מהנקודות העבירו ישר, כך ששני הישרים הללו יהיו מקבילים.

הסבירו מדוע שני הישרים שבניתם אכן מקבילים.

תשובה: בעמ' 16

<u>משימה מס' 14</u>



נתונים שני קטעים שונים.

בנו שני מרובעים, ABCD ו-PQMT, בהתאם לשלבים הבאים:

א. בניית המרובע ABCD.

שלב ראשון: סרטטו במחברתכם זווית ישרה. על שוקי הזווית הקצו את הקטעים הנתונים, כל קטע על שוק אחרת, כך שלקטעים יהיה קצה משותף.

שלב שני: סמנו ב-A את הקצה המשותף. סמנו ב-B את הקצה השני של הקטע האחד, וסמנו ב-D את הקצה השני של הקטע האחר.

שלב שלישי: דרך הנקודה B סרטטו ישר, המקביל לישר העובר דרך הקטע AD.

שלב רביעי: דרך הנקודה D סרטטו ישר, המקביל לישר העובר דרך הקטע AB.

שלב חמישי: סמנו ב-C את נקודת החיתוך של שני הישרים שסרטטתם.

ב. בניית המרובע PQMT.

שלב ראשון: סרטטו במחברתכם זווית כלשהי (לא זווית ישרה). על שוקי הזווית הקצו את הקטעים הנתונים, כל קטע על שוק אחרת, כך שלקטעים יהיה קצה משותף.

שלב שני: סמנו ב-P את הקצה המשותף. סמנו ב-Q את הקצה השני של הקטע האחד, וסמנו ב-T את הקצה השני של הקטע האחר.

שלב שלישי: דרך הנקודה Q סרטטו ישר, המקביל לישר העובר דרך הקטע PT.

שלב רביעי: דרך הנקודה T סרטטו ישר, המקביל לישר העובר דרך הקטע PQ.

שלב חמישי: סמנו ב-M את נקודת החיתוך של שני הישרים שסרטטתם.

ג. מה ההבדל בבניית שני המרובעים הללו?

ד. איזה סוג של מרובע הוא ABCD? בדקו את תשובתכם.

ה. האם המרובע PQMT הוא מלבן? אם כן, הסבירו. אם לא, האם זוכרים אתם את שמו?

ו. מהן התכונות המשותפות לשני המרובעים הללו?

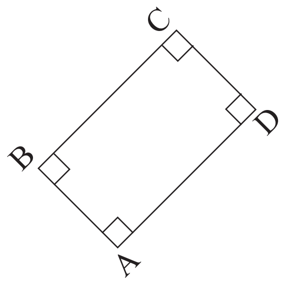
ז. מה ההבדל בין שני המרובעים הללו?

ח. דני אומר: "כל מרובע, שצלעותיו הנגדיות מקבילות, הוא מלבן". האם דני צודק? הסבירו.

ט. ענת אומרת: "במלבן הצלעות הנגדיות מקבילות; אך מרובע, שצלעותיו הנגדיות מקבילות, הוא לא תמיד מלבן". האם ענת צודקת? הסבירו.

תשובות: בעמ' 17

לצורך בניית המלבן ניתן להסתפק בבניית זווית ישרה אחת בלבד ולהסתמך על העובדה, שהצלעות הנגדיות במקבילית מקבילות.
מכאן ניתן לקבוע: מרובע, שצלעותיו הנגדיות מקבילות וזווית אחת שלו היא ישרה, הוא מלבן (שלוש הזוויות הנותרות תהיינה אף הן ישרות).



<u>משימה מס' 15</u>

נתון מלבן ABCD.

א. בנו במחברתכם מלבן החופף לו, תוך שימוש בבניית ישרים מקבילים ובבניית זווית ישרה אחת.

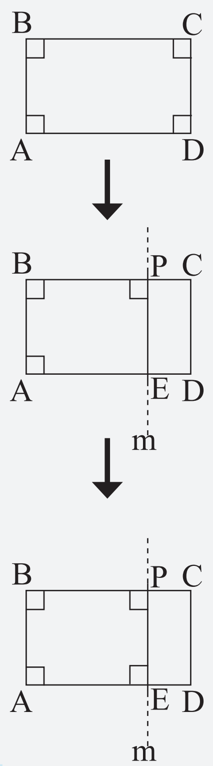
ב. על הצלע BC של המלבן שסרטטתם בחרו נקודה כלשהי K. דרכה העבירו ישר המאונך לישר BC (כלומר מאונך לישר העובר דרך הצלע BC של המלבן).

ג. סמנו ב- E את נקודת החיתוך של הישר שסרטטתם והישר AD (הישר העובר דרך הצלע AD).

ד. מה תוכלו לומר על המרובע ABKE? הסבירו.

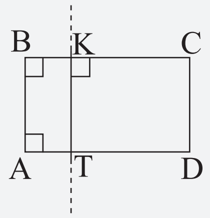
ה. מה תוכלו לומר על הישר KE (הישר העובר דרך הקטע KE) ביחס לישר AD?

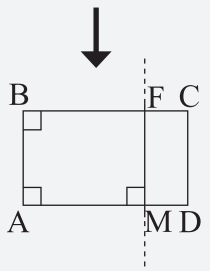
תשובות: בעמ' 17



- בדומה למשימה הקודמת, מס' 15, נסרטט מלבן כלשהו ABCD.
- נבחר נקודה כלשהי P על הצלע BC, ונסרטט דרכה ישר m, המאונך לצלע BC והחותך את הצלע AD בנקודה E.
- במרובע ABPE שנוצר $\sphericalangle A$ ו- $\sphericalangle B$ הן זוויות ישרות, מכיוון שהן זוויות של המלבן ABCD. $\sphericalangle BPE$ ישרה, מכיוון ש-$BC \perp m$.
במרובע ABPE יש שלוש זוויות ישרות, ולכן גם הזווית הרביעית היא ישרה.
כלומר: $\sphericalangle PEA$ היא זווית ישרה, ו-ABPE הוא מלבן.
- מכאן: $PE \perp AD$.

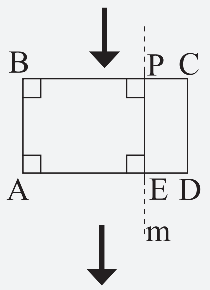
- בדומה לעיל אם נערוך ניסוי וניקח נקודות נוספות על הצלע BC, ונעביר דרכן ישרים המאונכים לצלע BC, הישרים האלה יהיו גם הם מאונכים לצלע AD:
אם $KT \perp BC$, אזי $KT \perp AD$.



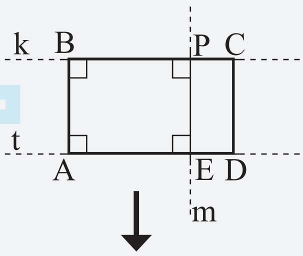


- ולהפך: אם ניקח נקודות על הצלע AD ונעביר דרכן ישרים, המאונכים לצלע AD, הם יהיו גם מאונכים לישר BC:
אם $MF \perp AD$, אזי $MF \perp BC$.

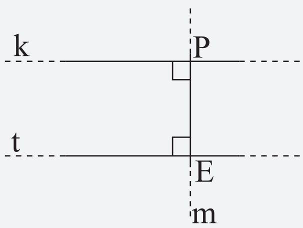
- מכאן ניתן להסיק, שאם ניקח נקודה כלשהי על אחת מצלעות המלבן ונעביר דרכה אנך לצלע זו, הוא יהיה מאונך גם לצלע הנגדית לה.



- נחזור כעת לציור, שבו הועבר אנך PE לצלע BC: $PE \perp BC$.

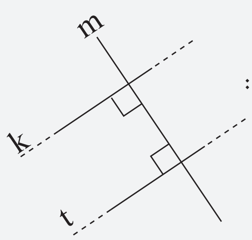


- נעביר דרך הצלעות BC ו-AD ישרים k ו-t.
- מכיוון שהצלעות הנגדיות במלבן הן מקבילות, גם הישרים k ו-t יהיו מקבילים.



- נשמיט מהציור את המלבן, ונקבל את הסרטוט הבא.
- ניתן לסכם באופן הבא: כיוון ש-$t \parallel k$ ו-$k \perp m$, אזי $t \perp m$.

ישר, המאונך לאחד משני ישרים מקבילים, מאונך גם לשני:
אם $t \parallel k$ ו-$k \perp m$, אזי $t \perp m$.
או לחלופין:
אם $t \parallel k$ ו-$t \perp m$, אזי $k \perp m$.



<u>משימה מס' 16</u>

סרטטו במחברתכם שני ישרים מקבילים $a \parallel b$.

על הישר a בחרו נקודה כלשהי, והעבירו דרכה ישר c, כך ש-$c \perp a$. בדקו באמצעות מדידה את הטענה:

"ישר, המאונך לאחד משני ישרים מקבילים, מאונך גם לשני".

תשובה: בעמ' 17

<u>משימה מס' 17</u>

סרטטו במחברתכם שני ישרים מקבילים $k \parallel a$.

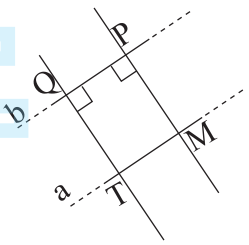
א. על הישר k בחרו נקודה כלשהי A, ודרכה העבירו ישר m, כך ש-$m \perp k$.
סמנו ב-B את נקודת החיתוך של הישרים m ו-a.

ב. על הישר a בחרו נקודה כלשהי C (השונה מהנקודה B), והעבירו דרכה ישר t, כך ש-$t \perp a$.
סמנו ב-D את נקודת החיתוך של הישרים t ו-k.

ג. קבעו את סוג המרובע ABCD. נמקו את תשובתכם.

תשובות: בעמ' 18

<u>משימה מס' 18</u>

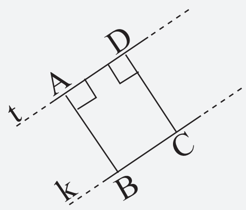


בסרטוט שלפניכם שני ישרים מקבילים $a \parallel b$. על הישר b נבחר שתי נקודות Q ו- P, ודרך כל אחת מהנקודות הללו נעביר ישר הניצב לישר b.
נסמן ב- T ו- M את נקודות החיתוך של הישרים עם הישר a.

א. הסבירו מדוע ניתן לקרוא לקטעים QT ו-PM "אנכים משותפים" לישרים המקבילים a ו- b.

ב. מה תוכלו לומר על הקטעים QT ו- PM? הסבירו.

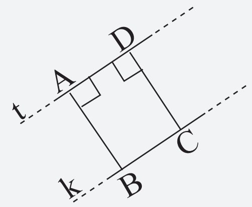
תשובות: בעמ' 18



במשימה מס' 18 דברנו על המושג "אנכים משותפים".
נרחיב כעת את ההסבר לגבי מושג זה.

- נתונים שני ישרים מקבילים k ו-t.
- על הישר t נבחר נקודות A ו- D
ונבנה אנכים AB ו- DC לישר t ($DC \perp t$, $AB \perp t$).
- t ו-k מקבילים, $k \parallel t$, שכן כל אחד מהקטעים AB ו- DC יהיו מאונכים גם לישר k ($DC \perp k$, $AB \perp k$), שהרי "ישר המאונך לאחד משני ישרים מקבילים, מאונך גם לשני".
- מכאן שהקטעים AB ו- DC נקראים "אנכים משותפים" לשני הישרים המקבילים t ו-k.
- לכן כל זוויות המרובע ABCD הן ישרות, כלומר ABCD הוא מלבן.
- מאחר ש-ABCD הוא מלבן, צלעותיו הנגדיות שוות, ולכן האנכים AB ו- DC שווים זה לזה, כלומר AB=DC.

כל שני אנכים, המשותפים לשני ישרים מקבילים,
והקטעים שהם מקצים על הישרים המקבילים
יוצרים מלבן. במלבן הצלעות הנגדיות שוות,
ולכן האנכים המשותפים שווים זה לזה.



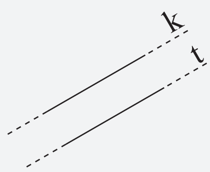
כלומר:
אם $t \parallel k$, ו-AB ו- DC הם האנכים המשותפים לישרים אלה, אזי ABCD הוא מלבן,
ולכן AB=DC.
הבהרת מושגים:
"שני אנכים משותפים" - הכוונה לקטעים AB ו- DC שבסרטוט.
"הקטעים שהם מקצים על הישרים המקבילים" - הכוונה לקטעים AD ו- BC שבסרטוט.

<u>משימה מס' 19</u>

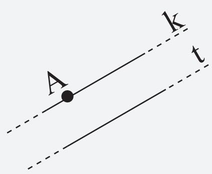
סרטטו במחברתכם שני ישרים מקבילים, בחרו על אחד מהישרים שתי נקודות כלשהן, והעבירו דרכן אנכים משותפים לשני הישרים. מדדו את אורכי האנכים והראו שהם אכן שווים זה לזה.

תשובה: בעמ' 18

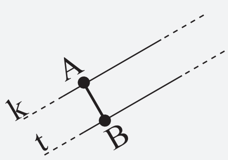
- נסרטט שני ישרים מקבילים, $k \parallel t$.



- נבחר על אחד הישרים - למשל, על הישר k, נקודה כלשהי A.

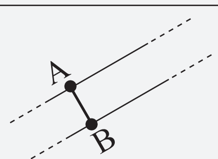


- דרך נקודה A נעביר אנך משותף לישרים הללו.
(שימו לב: מספיק שנבנה קטע, כך ש-$AB \perp k$, והוא באופן אוטומטי יהיה מאונך גם לישר t).



- לאורך של הקטע AB קוראים "המרחק בין שני הישרים המקבילים".

המרחק בין שני ישרים מקבילים שונים
הוא אורך הקטע המאונך לשניהם.



כלומר:
אם $k \parallel t$ ו-$AB \perp k$ (וכמובן גם $AB \perp t$), אזי אורך הקטע AB
הוא המרחק בין שני הישרים המקבילים k ו-t.

<u>משימה מס' 20</u>

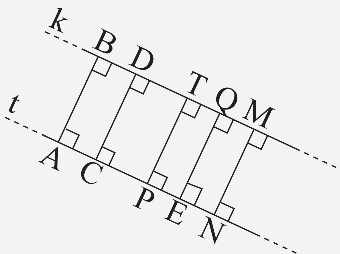
סרטטו במחברתכם שני ישרים המקבילים זה לזה, $a \parallel t$. על הישר a סמנו שלוש נקודות שונות P , Q , M, ודרך כל אחת מהנקודות הללו סרטטו אנכים משותפים לשני הישרים. האנכים המשותפים הם בהתאמה PN , QT , ME.

א. מה תוכלו לומר על הקטעים ME , QT ו- PN? נמקו.

ב. בעזרת מדידה ודאו את המסקנות שהסקתם בסעיף הקודם.

תשובות: בעמ' 18

בדומה למשימה מס' 20 נסרטט שני ישרים מקבילים $k \parallel t$.



על אחד מהישרים נסמן כמה נקודות

ונבנה דרכן אנכים משותפים

NM , EQ , PT , CD ו-AB.

אם ניקח, למשל, את זוג האנכים המשותפים

AB ו- PT, ניתן לטעון שהם שווים, כלומר AB=PT,

מכיוון שהם צלעות נגדיות במלבן ABTP.

ניזכר במסקנה: "כל שני אנכים, המשותפים לשני ישרים מקבילים, והקטעים שהם מקצים על הישרים המקבילים יוצרים מלבן. במלבן הצלעות הנגדיות שוות, ולכן האנכים המשותפים שווים זה לזה".

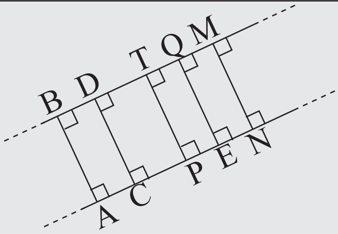
נימוק זה ניתן להפעיל לגבי כל זוג אנכים משותפים. לדוגמה:

במלבן CDQE מתקיים CD=EQ ; במלבן CDMN מתקיים CD=NM, וכו'.

מכאן ניתן להסיק שכל האנכים המשותפים, המסורטטים בציור, וכן כל האנכים המשותפים, שניתן לסרטטם (ויש אינסוף כאלה), שווים זה לזה ושווים ל"גודל קבוע".

למדנו כי האנך המשותף נקרא "המרחק בין ישרים מקבילים", ולכן ניתן להסיק כי:

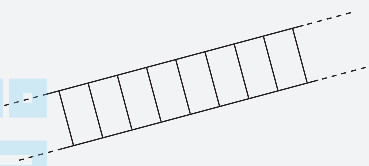
> **!** המרחק בין שני ישרים
> מקבילים קבוע.
> AB=CD=PT=EQ=NM=. . . = גודל קבוע



מהטענה הקודמת ניתן לקבוע, כי כאשר שני ישרים מקבילים הם שונים (לא מתלכדים), המרחק ביניהם הוא גודל קבוע השונה מ-0. מכאן ששני הישרים הללו אינם חותכים זה את זה. דוגמה לכך היא מסילת רכבת שמסלולה ישר (ללא סיבובים ופניות).

מכיוון שהמרחק בין שני פסי המסילה הוא גודל קבוע,

לא יחתכו הפסים זה את זה לעולם.



שני ישרים מקבילים שונים אינם חותכים זה את זה,
ולהפך:
שני ישרים שונים, שאינם חותכים זה את זה, הם ישרים מקבילים.

לתשומת לבכם!!
למדנו ששני ישרים שמתלכדים הם גם ישרים מקבילים. לכן ניתן לקבוע:

ישרים מקבילים מתלכדים או שאינם נפגשים.

משימה מס' 21

סרטטו במחברתכם שני ישרים מקבילים. בחרו על אחד מהישרים חמש נקודות שונות, והעבירו דרכן אנכים משותפים לשני הישרים הללו. מדדו את אורכי האנכים המשותפים וודאו את הטענה: "המרחק בין ישרים מקבילים קבוע".

תשובה: בעמ' 19

משימה מס' 22

בסרטוט שלפניכם נתון מלבן ABCD, ונתונים שני ישרים מקבילים, $k \parallel a$.

המרחק בין שני הישרים k ו-a שווה לאורך הצלע AB של המלבן ABCD.

על הישר a הקצו את הקטע PQ,

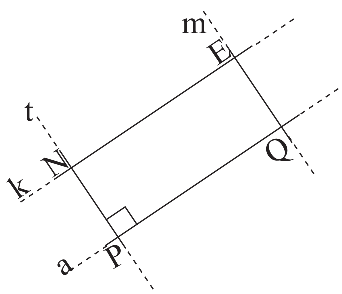
השווה באורכו לצלע AD של המלבן;

דרך הנקודה P העבירו ישר t המאונך

לישר a ($t \perp a$); ודרך הנקודה Q העבירו

ישר m המקביל לישר t ($m \parallel l$).

התקבל המרובע PNEQ.

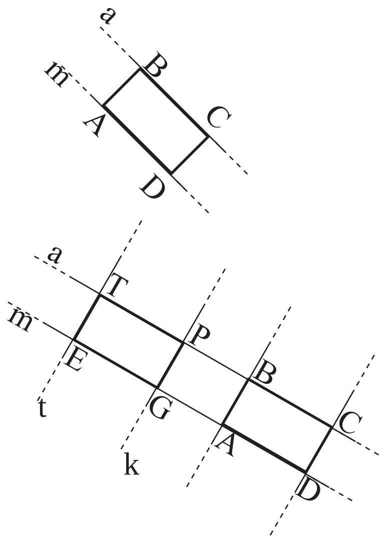


א. איזה סוג הוא המרובע PNEQ? נמקו את תשובתכם.

ב. מה תוכלו לומר על המלבן ABCD והמרובע PNEQ? נמקו את תשובתכם.

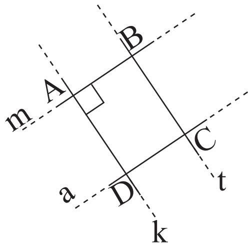
תשובות: בעמ' 19

<u>משימה מס' 23</u>



נתון מלבן ABCD. דרך שתי צלעות המלבן AD ו-BC
העבירו ישרים a ו-m.
על הישר m הקצו קטע EG, השווה באורכו
לצלע BC של המלבן ABCD.
דרך הנקודה E ו- G העבירו שני ישרים t ו-k,
המקבילים לצלע AB של המלבן ABCD
($t \parallel AB$,$k \parallel AB$).
התקבל המרובע ETPG.
הסבירו מדוע המרובע ETPG הוא מלבן,
החופף למלבן ABCD.
תשובה : בעמ' 20

<u>משימה מס' 24</u>

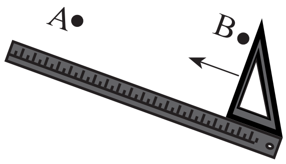


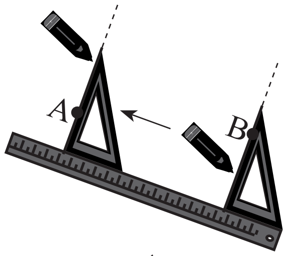
זוג ישרים מקבילים, $m \parallel a$, חותך זוג אחר של ישרים מקבילים, $k \parallel t$,
כך ש-$m \perp k$, ומתקבל מרובע ABCD.
א. קבעו איזה סוג הוא מרובע ABCD. נמקו את תשובתכם.
ב. איזו תכונה מיוחדת תהיה למלבן זה, אם היה מתברר, שהמרחק בין הישרים m ו-a שווה למרחק בין הישרים k ו-t? נמקו את תשובתכם.
ג. האם זוכרים אתם מלימודיכם משנים קודמות כיצד קוראים למלבן בעל תכונה מיוחדת זו? אם כן, מה שמו?
תשובות : בעמ' 20

תשובות

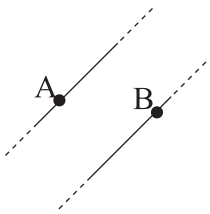
13. הניחו סרגל במקום כלשהו (אפשר גם דרך הנקודות A ו-B), ובצעו את השלבים בבניית ישרים מקבילים.

שלב א'
מזיזים את משולש הסרטוט עד הנקודה B.



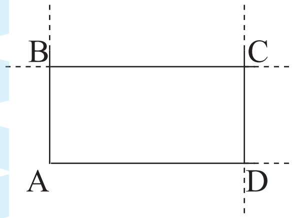


שלב ב'

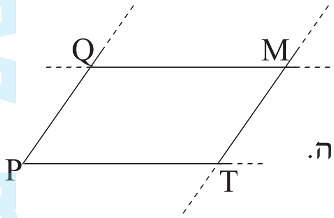


שלב ג'
שני הישרים מקבילים, כי הם ניצבים לאותו ישר ש"מיוצג" על-ידי הסרגל.

14. א) לצורך סרטוט הישרים המקבילים נשתמש במשולש סרטוט וסרגל.
הסרטוט שיתקבל יכול להיות שונה מסרטוט זה, לא בממדי המרובע,
אלא במקומו של המרובע על הדף (מסובב).



ב) לצורך סרטוט הישרים המקבילים נשתמש במשולש סרטוט וסרגל.
הסרטוט שיתקבל יכול להיות שונה לגמרי מסרטוט זה,
אך אורכי הצלעות של המרובע יהיו זהים לאורכי הצלעות של מרובע זה.



ג) תהליך הבנייה של שני המרובעים זהה לחלוטין, לרבות אורכי הצלעות, אך הזווית הנלקחת לצורך התחלת הסרטוט במרובע ABCD היא ישרה, ואילו במרובע PQMT הזווית שונה מזווית ישרה.

ד) ABCD הוא מלבן. על-ידי משולש סרטוט ניתן לוודא שזוויות המרובע הן ישרות.

ה) המרובע PQMT אינו מלבן, כי זוויותיו לא ישרות. המרובע הוא מקבילית.

ו) בשני המרובעים הצלעות הנגדיות מקבילות וגם שוות.

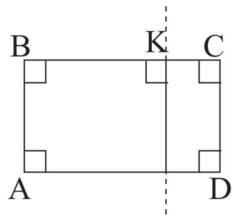
ז) במרובע ABCD כל הזוויות ישרות. במרובע PQMT כל הזוויות לא ישרות.

ח) דני לא צודק: הטענה לא נכונה תמיד. לדוגמה:
במרובע PQMT הצלעות הנגדיות מקבילות, אך המרובע אינו מלבן.

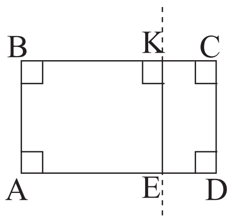
ט) ענת צודקת: במלבן הצלעות הנגדיות תמיד מקבילות; וגם נכון שמרובע, שצלעותיו הנגדיות מקבילות, הוא לא תמיד מלבן. ההסבר כמו בסעיף ח'.

15. א) תהליך הבנייה מתואר במשימה מס' 14.

ב)



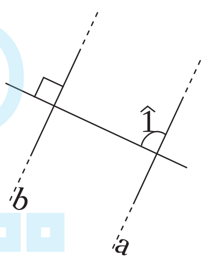
ג)



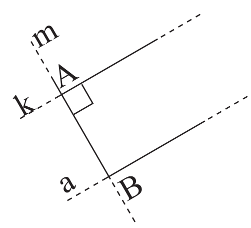
ד) ABKE הוא מלבן, שהרי $\sphericalangle A$ ו-$\sphericalangle B$ הן זוויות ישרות (כיוון שהן זוויות המלבן ABCD);
$\sphericalangle BKE$ היא ישרה, כי נתון $KE\perp BC$; ואם במרובע יש שלוש זוויות ישרות, גם הזווית הרביעית היא ישרה. לכן ABKE הוא מלבן.

ה) $\sphericalangle AEK$ היא ישרה, כי היא משמשת כזווית במלבן ABKE. לכן $KE\perp AD$.

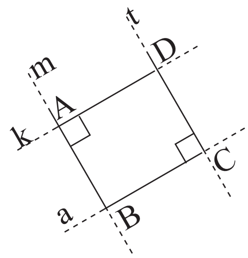
16. באמצעות משולש סרטוט וסרגל נסרטט שני ישרים מקבילים a ו-b.
נבחר נקודה כלשהי על הישר a, ונסרטט ישר c המאונך לישר a (באמצעות משולש סרטוט, מחוגה, קיפולי נייר וכו').
נבדוק באמצעות משולש סרטוט (או בכל אמצעי אחר) אם הזווית $\hat{1}$ היא ישרה.
אם-כן, הטענה נכונה.



17. א)



ב)



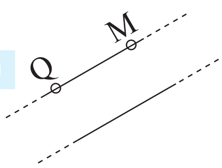
ג) ABCD הוא מלבן, שהרי $m\perp k$ ו-$a\parallel k$ לכן $m\perp a$, שהרי "אם ישר מאונך לאחד משני ישרים מקבילים, הוא מאונך גם לשני". כלומר $\sphericalangle A$ ו- $\sphericalangle B$ הן ישרות. $t\perp a$, ולכן $\sphericalangle C$ היא ישרה.
במרובע ABCD יש שלוש זוויות ישרות, ולכן גם הזווית הרביעית, $\sphericalangle D$, היא ישרה, כלומר ABCD הוא מלבן.

18. א) $QT\perp b$ ו-$a\parallel b$, ולכן $QT\perp a$, שהרי "ישר המאונך לאחד משני ישרים מקבילים, מאונך גם לשני". כלומר הקטע QT הוא אנך משותף לישרים b ו-a.
באותה דרך ניתן להראות כי הקטע PM הוא אנך משותף לישרים b ו-a, שהרי $PM\perp b$ ו-$a\parallel b$, ולכן $PM\perp a$.
לסיכום: QT ו-PM הם "אנכים משותפים" לשני הישרים המקבילים a ו-b.

ב) QT ו- PM הם "אנכים משותפים" לישרים a ו-b, ולכן כל זוויות המרובע QPMT ישרות, כלומר QPMT הוא מלבן. במלבן הצלעות הנגדיות שוות ומקבילות זו לזו, ולכן $QT\parallel PM$ ו-$QT=PM$.

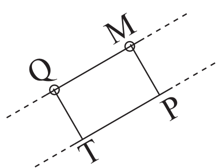
19. שלב א'
בעזרת משולש סרטוט וסרגל נסרטט שני ישרים מקבילים.

שלב ב'
על אחד מהישרים נבחר שתי נקודות שונות.

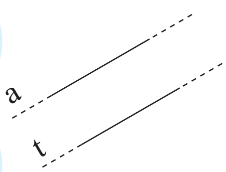


שלב ג'
דרך שתי הנקודות נעביר אנכים משותפים לשני הישרים הללו.

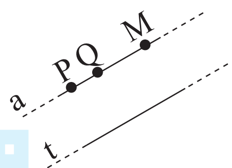
שלב ד'
בעזרת סרגל, מחוגה, קיפולי נייר או כל אמצעי אחר נבדוק אם הקטעים QT ו- MP שווים זה לזה.

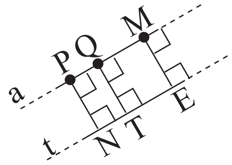


20. א)
- בעזרת משולש סרטוט וסרגל נסרטט שני ישרים מקבילים a ו-t.



- נסמן את הנקודות M , Q , P על הישר a.

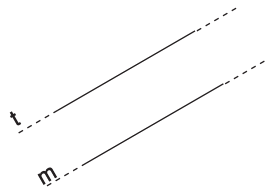




- נעביר אנכים משותפים דרך שלוש הנקודות הללו.
שלושת הקטעים שווים זה לזה, שכן
במלבן PNTQ הצלעות הנגדיות שוות, PN=QT.
במלבן PNEM הצלעות הנגדיות שוות, PN=ME.
במלבן QTEM הצלעות הנגדיות שוות, QT=ME.
לסיכום: PN=QT=ME.

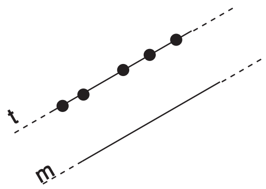
ב) בעזרת סרגל, מחוגה, קיפולי נייר או כל אמצעי אחר נמדוד את אורכי שלושת הקטעים PN , QT ו- ME, ונוודא שהם שווים.

21. שלב א'



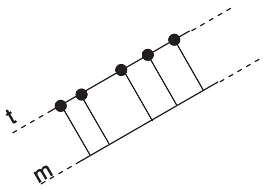
בעזרת משולש סרטוט וסרגל
נסרטט שני ישרים מקבילים t ו-m.

שלב ב'



נסמן על אחד הישרים הללו
חמש נקודות כלשהן.

שלב ג'



באמצעות משולש סרטוט, מחוגה,
קיפולי נייר או כל אמצעי אחר נעביר
מכל אחת מחמש הנקודות
הללו אנך לישר השני.

שלב ד'

בעזרת סרגל, מחוגה או כל אמצעי אחר נמדוד את אורכי חמשת הקטעים הללו, ונוודא שהקטעים שווים. מאחר שנבחרו נקודות באופן אקראי, ניתן לטעון כי המרחק בין הישרים המקבילים הוא קבוע.

22. א) המרובע PNEQ הוא מלבן כי:
- $a \perp t$ לכן $\sphericalangle NPQ$ היא ישרה.
- $a \perp t$ ו-$a \parallel k$ לכן $k \perp t$ שהרי: "ישר, המאונך לאחד משני ישרים מקבילים, מאונך גם לישר השני". לכן $\sphericalangle PNE$ היא ישרה.
- $l \parallel m$ ו-$a \perp t$ לכן $m \perp a$ (מאותו נימוק), ולכן $\sphericalangle PQE$ היא ישרה.
- אם במרובע יש שלוש זוויות ישרות: $\sphericalangle NPQ$, $\sphericalangle PNE$ ו- $\sphericalangle PQE$ אז גם הזווית הרביעית $\sphericalangle QEN$ היא ישרה, ולכן המרובע PNEQ הוא מלבן (לחלופין ניתן להסביר ש- $\sphericalangle QEN$ ישרה באופן הבא: $a \perp m$ ו-$a \parallel k$ לכן $k \perp m$ כלומר $\sphericalangle QEN$ היא ישרה).

ב) המלבן ABCD והמלבן PNEQ חופפים כי:
- ידוע: AD=PQ.
- ידוע שהצלע AB שווה למרחק בין שני הישרים המקבילים k ו-a. כמו-כן, לפי סעיף א' הקטע PN הוא האנך המשותף לישרים המקבילים k ו-a, כלומר הוא המרחק בין הישרים, ולכן NP=AB.
- AD=PQ ו- AB=NP, כלומר שתי הצלעות הסמוכות של המלבן ABCD שוות אחת לאחת לשתי הצלעות הסמוכות של המלבן PNEQ.

למדנו: "שני מלבנים שיש להם שתי צלעות סמוכות שוות אחת לאחת הם חופפים".
לכן מלבן ABCD חופף למלבן PNEQ.

23. נסביר תחילה מדוע המרובע ETPG הוא מלבן:
- AB היא צלע המלבן לכן $AB\perp AD$ כלומר $AB\perp m$, כי הישר M עובר דרך הקטע AD.
- $AB\perp m$ ו-$AB\parallel t$ לכן $t\perp m$ כי "אם ישר מאונך לאחד משני ישרים מקבילים, הוא מאונך גם לשני". לכן $\sphericalangle EGP$ היא ישרה.
- $m\perp t$ ו-$a\parallel m$ לכן $a\perp t$ (מאותו נימוק). לכן $\sphericalangle GPT$ היא ישרה.
- $AB\perp m$ ו-$AB\parallel k$ לכן $k\perp m$ (מאותו נימוק). לכן $\sphericalangle GET$ היא ישרה.
- אם במרובע שלוש זוויות ישרות: $\sphericalangle EGP$, $\sphericalangle GPT$ ו- $\sphericalangle GET$ אזי גם הזווית הרביעית היא ישרה, והמרובע ETPG הוא מלבן.

כעת נסביר מדוע המלבנים חופפים.
- הקטעים AB ו-GP הם האנכים המשותפים לשני הישרים המקבילים $(m\parallel a)$, ולכן הם המרחקים בין שני הישרים הללו. ידוע כי "המרחק בין ישרים מקבילים קבוע". לכן שני הקטעים שווים זה לזה, AB=GP.
- הקטעים AD ו-EG שווים (לפי הנתון), כלומר EG=AD.
- מכאן ששתי הצלעות הסמוכות של המלבן ABCD שוות אחת לאחת לשתי הצלעות הסמוכות של המלבן ETPG, ולכן הם חופפים.

24. א) המרובע ABCD הוא מלבן, כי:
- $k\perp m$ לכן $\sphericalangle DAB$ היא ישרה.
- $k\perp m$ ו-$t\parallel k$ לכן $t\perp m$ (כי ישר, המאונך לאחד משני ישרים מקבילים, מאונך גם לשני). לכן $\sphericalangle ABC$ היא ישרה.
- $m\perp k$ ו-$a\parallel m$ לכן $a\perp k$ (מאותו נימוק). לכן $\sphericalangle ADC$ היא ישרה.
- אם במרובע יש שלוש זוויות ישרות, אזי גם הזווית הרביעית היא ישרה, והמרובע הוא מלבן.

ב) במלבן זה כל הצלעות שוות זו לזו (ולא רק הצלעות הנגדיות), שהרי:
- AD משמש כאנך משותף לישרים המקבילים $(m\parallel a)$. לכן הקטע AD הוא המרחק בין הישרים m ו-a.
- AB משמש כאנך משותף לישרים המקבילים $(k\parallel t)$. לכן הקטע AB הוא המרחק בין הישרים k ו-t.
- אם המרחק בין הישרים m ו-a שווה למרחק בין הישרים t ו-k, פירוש הדבר ש-AD=AB.
- לפי סעיף א', המרובע ABCD הוא מלבן. במלבן הצלעות הנגדיות שוות, ולכן: AD=BC ו-AB=DC, ומכיוון ש-AD=AB, נקבל: AD=AB=BC=CD, כלומר כל צלעות המלבן שוות. ריבוע. מרובע, שארבע זוויותיו ישרות (כלומר מלבן) וארבע צלעותיו שוות זו לזו, הוא ריבוע.