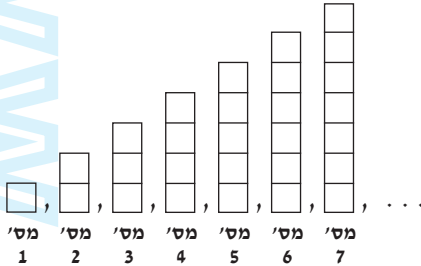


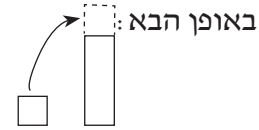
## המשתנה - משימת חקר - סיכום

תרגיל מס' 10 - סדרת 1, 2, 3, ...

### I. משימה ראשונה



- נתונה סדרה של מגדלים המורכבים ממשבצות.
- א. אם  $a$  הוא מספר המשבצות במגדל מסוים. כמה משבצות יהיו במגדל הבא אחריו?
- ב. כמה משבצות יש במגדל הנמצא במקום ה- $n$ ?
- ג. הניחו את מגדל מס' 1 על מגדל מס' 3 באופן הבא:



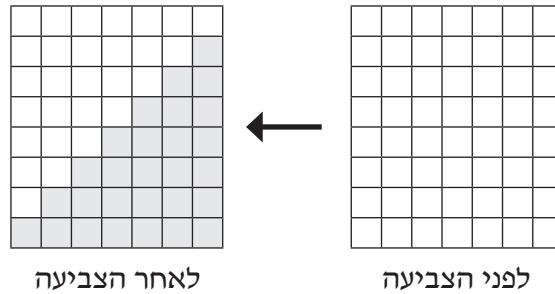
- מה תוכלו לומר על הגובה של המגדל החדש בהשוואה לגובה של מגדל מס' 2?
- מה תוכלו לומר על הגובה של מגדל מס' 2 בהשוואה לגובה של המגדל החדש שנבנה?
- ד. הניחו את מגדל מס' 2 על מגדל מס' 4. מה תוכלו לומר על מספר המשבצות במגדל החדש בהשוואה למספר המשבצות במגדל מס' 3? ולהפך?
- ה. הניחו את מגדל מס' 3 על מגדל מס' 5, והשוו בין מספר המשבצות במגדל החדש לבין מספר המשבצות במגדל מס' 4.
- ו. האם נכונה הטענה: "בסדרה זו מספר המשבצות שבמגדל החל במגדל מס' 2 שווה למחצית סכום המשבצות בשני המגדלים הסמוכים לו"? אם כן, בדקו את נכונות הטענה לגבי מגדל מס' 5 ומגדל מס' 6. אם לא, הסבירו מדוע.
- ז. נתונה סדרה, שבה ההפרש בין כל איבר לאיבר שלפניו הוא ערך קבוע:  $3, 7, 11, 15, 19, \dots$ . בדקו אם הטענה, המנוסחת בסעיף ו', נכונה גם לגבי סדרה זו. אם כן, נסחו את הטענה לגבי סדרת המספרים (לא לסדרת הצורות).
- ח. נתונה סדרה חדשה בעלת התכונה שנוסחה בסעיף ז'. מהו האיבר בסדרה זו, אם ידוע ששני האיברים הסמוכים לו הם 23 ו-61?

### תשובות:

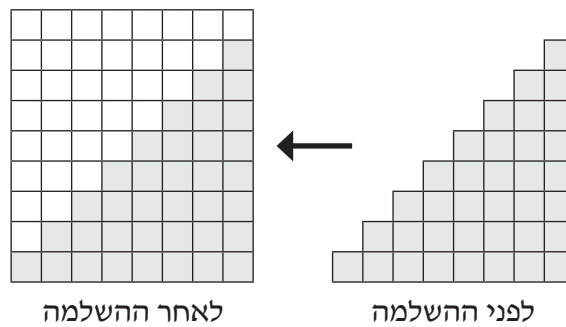
- (א)  $a+1$
- (ב)  $n$
- (ג) גובהו של המגדל החדש גדול פי 2 מהגובה של מגדל מס' 2. במילים אחרות: גובהו של מגדל מס' 2 הוא מחצית מגובהו של המגדל החדש.
- (ד) מספר המשבצות במגדל החדש גדול פי 2 ממספר המשבצות במגדל מס' 3. במילים אחרות: מספר המשבצות במגדל מס' 3 שווה למחצית ממספר המשבצות שבמגדל החדש.
- (ה) מספר המשבצות במגדל החדש גדול פי 2 ממספר המשבצות במגדל מס' 4; ולהפך: מספר המשבצות במגדל מס' 4 קטן פי 2 ממספר המשבצות שבמגדל החדש.
- (ו) כן. בדיקה:  $\frac{4+6}{2} = 5$ ,  $\frac{5+7}{2} = 6$ .
- (ז) הטענה נכונה: "כל איבר החל באיבר השני שווה למחצית הסכום של שני האיברים הסמוכים לו".
- (ח) או במילים אחרות: הוא ממוצע של שני האיברים הסמוכים לו.
- (ח)  $\frac{61+23}{2} = 42$

**II. משימה שנייה**

לפניכם שטח משובץ, שבו שבע עמודות ושמונה שורות. חלק מהמשבצות נצבעו בצבע אפור כמתואר בציור (שלאחר הצביעה).

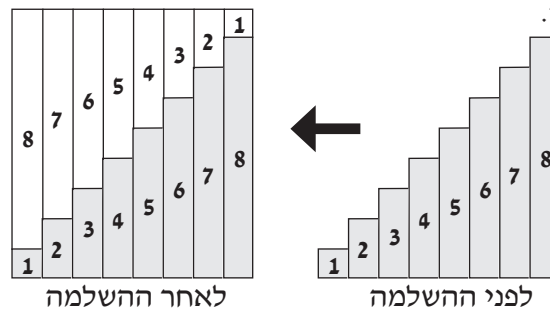


- א. התבוננו בציור שלפני הצביעה, וחשבו את מספר המשבצות שבשטח - בלי לספור אותן.
- ב. התבוננו בציור שלאחר הצביעה, וחשבו כמה משבצות אפורות וכמה משבצות לבנות יש בשטח - בלי לספור אותן.
- ג. המבנה המדורג (בצבע האפור) מורכב מבסיס, ובו 8 משבצות, וגובהו 8 משבצות. המבנה הושלם כמתואר בציור על-ידי המבנה המדורג (בצבע לבן).



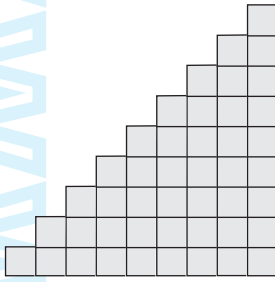
חשבו את מספר המשבצות במבנה המדורג האפור - בלי לספור אותן. (הדרכה: היעזרו בשטח המשובץ שלאחר ההשלמה.)

- ד. מחקו במבנה האפור ובמבנה הלבן את קווי השורות, ורשמו בכל עמודה שהתקבלה את מספר המשבצות שיש בה.



- (1) האם לאחר ההשלמה השתנה מספר העמודות?
- (2) האם לאחר ההשלמה השתנה מספר השורות? אם כן, לכמה?
- (3) אם במבנה האפור היו 14 עמודות, כמה שורות יהיו בשטח שלאחר ההשלמה?
- (4) אם במבנה האפור היו 10 עמודות, כמה שורות יהיו בשטח שלאחר ההשלמה?

-14-



ה. במבנה האפור שלפניכם יש 9 עמודות, כמתואר בציור.

(1) אם נשלים את המבנה בדומה לסעיפים

הקודמים, כמה שורות יהיו בשטח

שלאחר ההשלמה?

(2) כמה משבצות יהיו בשטח שלאחר ההשלמה?

(3) חשבו את מספר המשבצות במבנה המדורג

האפור - בלי לספור את מספרן.

(4) אם במבנה המקורי יש  $n$  עמודות, כמה משבצות יהיו בשטח המשובץ

לאחר ההשלמה? כמה משבצות יהיו במבנה המקורי האפור?

ו. נתונה סדרה של מספרים, המציינת את מספר המשבצות בכל אחת מהעמודות המרכיבות את

המבנה המדורג:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots$

(1) על-סמך סעיף ה' חשבו את הסכום של תשעת האיברים הראשונים של הסדרה, כלומר:  
 $1+2+3+4+5+6+7+8+9$

(2) על-סמך סעיף ה' חשבו את הסכום של 10 האיברים הראשונים של הסדרה. בדקו את נכונות החישוב על-ידי חיבור רגיל של האיברים.

(3) על-סמך סעיף ה' חשבו את הסכום של 11 האיברים הראשונים של הסדרה. בדקו את נכונות החישוב על-ידי חיבור רגיל של האיברים.

ז. כדי לחשב את הסכום:  $1+2+3+4+5+6+7+8$

נרשום מתחתיו את הסכום בסדר הפוך באופן הבא:

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \leftarrow \text{סדר רגיל} \\ + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \leftarrow \text{סדר הפוך} \end{array} \right. \\ \hline \begin{array}{cccccccc} \textcircled{+1} & \textcircled{+2} & \textcircled{+3} & \textcircled{+4} & \textcircled{+5} & \textcircled{+6} & \textcircled{+7} & \textcircled{+8} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{array} \end{array}$$

נקבל:

התקבלו שמונה קבוצות (בדומה לשמונה העמודות שבסעיף ד').

בכל קבוצה סכום המספרים הוא 9 (בדומה למספר השורות במבנה לאחר ההשלמה שבסעיף ד').

לכן הסכום הכולל הוא:  $8 \cdot 9 = 72$

72 הוא הסכום הכולל של פעמיים הסכום:  $1+2+\dots+8$ .

לכן הסכום של  $1+2+\dots+8$  הוא:  $\frac{8 \cdot 9}{2} = \frac{72}{2} = 36$ .

(1) חשבו בדרך זו את הסכום:  $1+2+3+4+5+6$ .

(2) חשבו בדרך זו את הסכום:  $1+2+3+\dots+16$ .

(3) חשבו בדרך זו את הסכום:  $1 + 2 + 3 + \dots + n$ .

נסחו את תשובתכם באופן הבא: "סכום המספרים..."

## תשובות :

א.  $7 \cdot 8 = 56$

ב. מספר המשבצות האפורות שווה למספר המשבצות הלבנות :  $\frac{7 \cdot 8}{2} = \frac{56}{2} = 28$

ג.  $\frac{8 \cdot 9}{2} = 36$

ד. (1) לא, נשאר 8 (2) כן, ל-9 (3) 15 (4)  $n+1$

ה. (1) 10 (2)  $9 \cdot 10 = 90$  (3)  $\frac{9 \cdot 10}{2} = \frac{90}{2} = 45$

(4) בשטח המשובץ לאחר ההשלמה :  $n \cdot (n + 1)$  משבצות.במבנה המדורג האפור :  $\frac{n \cdot (n + 1)}{2}$  משבצות.

ו. (1)  $\frac{9 \cdot 10}{2} = 45$  (2)  $\frac{10 \cdot 11}{2} = 55$  (3)  $\frac{11 \cdot 12}{2} = 66$

ז. (1) 
$$\begin{array}{r} 1+2+3+4+5+6 \\ + 6+5+4+3+2+1 \\ \hline 7+7+7+7+7+7 \end{array}$$

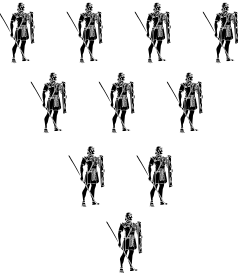
פעמים 6  
 $7 \cdot 6 = 42$

הסכום הוא :  $\frac{42}{2} = 21$

(2) 
$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 16 \\ + 16 + 15 + 14 + 13 + \dots + 1 \\ \hline 17 + 17 + 17 + 17 + \dots + 17 \end{array}$$

16 פעמים

הסכום הוא :  $\frac{16 \cdot 17}{2} = 136$



### III. משימה שלישית

א. מפקד סידר את חייליו בצורת חץ :

בשורה הראשונה לוחם אחד, בשורה השנייה שני לוחמים, בשורה השלישית שלושה לוחמים, וכו'. בסך הכול יש 20 שורות.

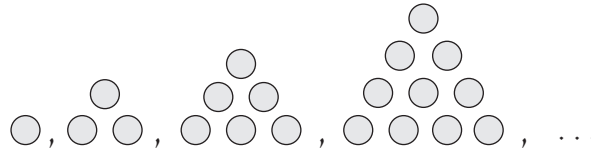
חשבו את סך-כל הלוחמים המסודרים באופן זה.

ב. נתונה סדרת המספרים הבאה:  $1, 3, 6, 10, \dots$ .

לצורך המחשת סדרה זו הציגו אותה כסדרה של מבנים,

הבנויים מעיגולים ומסודרים בצורת משולש שווה-צלעות

(לכן נקראים מספרים אלה "מספרים משולשים" - ראו ההערה בסוף התרגיל).



(1) חשבו את מספר העיגולים במבנה, הנמצא במקום ה-11 בסדרה.

(2) רשמו את עשרת האיברים הראשונים של הסדרה.

(3) כמה עיגולים יהיו במבנה הנמצא במקום ה-n?

בשם **מספרים משולשים** השתמש בפעם הראשונה הפילוסוף והמתמטיקאי היווני פיתגורס, שחי במאה ה-6 לפנה"ס. תחילה התפרסם פיתגורס כמתאגרף, אף זכה בפרסים במשחקים האולימפיים, ורק מאוחר יותר החל לעסוק במתמטיקה ובפילוסופיה.

תשובות :

$$\frac{20 \cdot (20 + 1)}{2} = 210 \quad \text{א.}$$

ב. שימו לב! כל מבנה מהווה סדרה:  $1, 2, 3, \dots$

$$\frac{11 \cdot (11 + 1)}{2} = 66 \quad (1)$$

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 \quad \text{כלומר: } 1, 3, 6, 10, \frac{5 \cdot 6}{2}, \frac{6 \cdot 7}{2}, \frac{7 \cdot 8}{2}, \frac{8 \cdot 9}{2}, \frac{9 \cdot 10}{2}, \frac{10 \cdot 11}{2} \quad (2)$$

$$\frac{n \cdot (n + 1)}{2} \quad (3)$$